Spojení metody SBRA a metody počátečních parametrů při řešení úloh nosníků na pružném podkladu

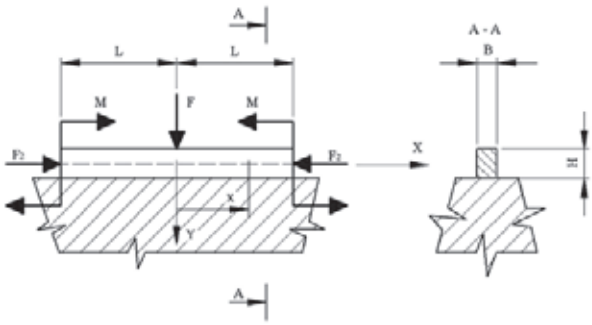
V současné době je v praktických úlohách stále více zohledňována nejistota při zjišťování materiálových vlastností, geometrického uspořádání vyšetřované struktury, zohledňování zatížení atd. Se stále více se rozvíjejícím a do praxe zaváděným, pravděpodobnostním přístupem ve výpočtech, mohou být tyto nejistoty ve výpočtech zohledněny. V této práci je plně využit pravděpodobnostní přístup stochastické mechaniky založený na simulačních technikách metody Monte Carlo. Simulation-Based Reliability Assessment Method (dále jen SBRAM), viz [5] až [7], patří v současné době mezi nejpoužívanější trendy stochastického inženýrského pohledu na svět.

V SBRAM jsou respektovány variabilní vstupy v podobě histogramů, přičemž výstupy mají následně také stejný náhodný charakter. Tato variabilita lépe a přesněji popisuje reálnou situaci, s jakou se může projektant, konstruktér, popř. výpočtář setkat. Závěry pravděpodobnostního výpočtu jsou vysloveny na základě porovnání vypočítané pravděpodobnosti nepříznivého stavu a požadované spolehlivosti struktury. S rozvojem a zvyšováním výkonů výpočetní techniky je možné výše uvedenou metodou analyzovat složitější a na výpočet náročnější struktury. Pravděpodobnostní přístup lze dále kombinovat s metodou konečných prvků (MKP), metodou hraničních prvků (MHP), metodou konečných objemů (MKO) a s dalšími numerickými metodami. Pro výpočet byl využit software Anthill.

V této práci je stručně předvedeno spojení metody SBRA a metody počátečních parametrů (MPP) jako elegantní analytické řešení přímých nosníků namáhaných ohybem a tlakem (teorie 2. řádu), které jsou uloženy na pružném podkladu dle Winklerova modelu, blíže viz [1] až [4].

ŘEŠENÝ PŘIKLAD

Řešeným příkladem je symetricky zatížený nosník uložený po celé délce $2L$ na pružném podkladu. Nosník je uprostřed zatížený vertikální silou F a na obou koncích působí vnější moment M a tlaková horizontální síla F_2, viz obr. 1. Uvažujeme tzv. 4. případ zatížení normálovou silou, viz [3] až [4]. Vstupní hodnoty (geometrie, zatížení a materiálové vlastnosti) jsou dané ohraničenými histogramy (viz např. tab. 1 a obr. 2), které dostatečně přesně vystihují reálnou variabilitu vyskytující se v běžné technické praxi. Byl proveden pravděpodobnostní posudek spolehlivosti nosníku dle mezního stavu únosnosti (tj. vypočtená pravděpodobnost překonání meze kluzu porovnáme s návrhovou pravděpodobností poruchy P_{DOV}). Nosník je vyroben z oceli A36.



Obr. 1 – Nosník délky 2L uložený na pružném podkladu.

Vstupní veličina:	Stručný popis:	Minimum:	Maximum:	Median:	Mean:
F /N/:	Síla na levé straně nosníku	0.0	280000.0	170031	133801
M /Nm/:	Moment na pravé straně nosníku	818.0	1000	909.4	909.1
F_2 /N/:	Axiální síla	65800	122200	94104	93991
E /Pa/:	Modul pružnosti v tahu materiálu nosníku	1.9×10^{11}	2.1×10^{11}	2.0×10^{11}	2.0×10^{11}
R_p /MPa/:	Mez kluzu materiálu nosníku	248.0	500.0	338.3	339.2
B /m/:	Šířka průřezu nosníku	9.8×10^{-2}	10.2×10^{-2}	10.0×10^{-2}	10.0×10^{-2}
H /m/:	Výška průřezu nosníku	19.6×10^{-2}	20.4×10^{-2}	20.0×10^{-2}	20.0×10^{-2}
K /Nm^{-3}/:	Modul podkladu podloží	15×10^6	25×10^6	20×10^6	20×10^6
L /m/:	Délka úseku nosníku	3			
P_{DOV} /1/:	Návrhová pravděpodobnost překonání meze kluzu	7×10^{-5}			

Tab. 1 – Vstupní proměnné veličiny a jejich základní charakteristiky

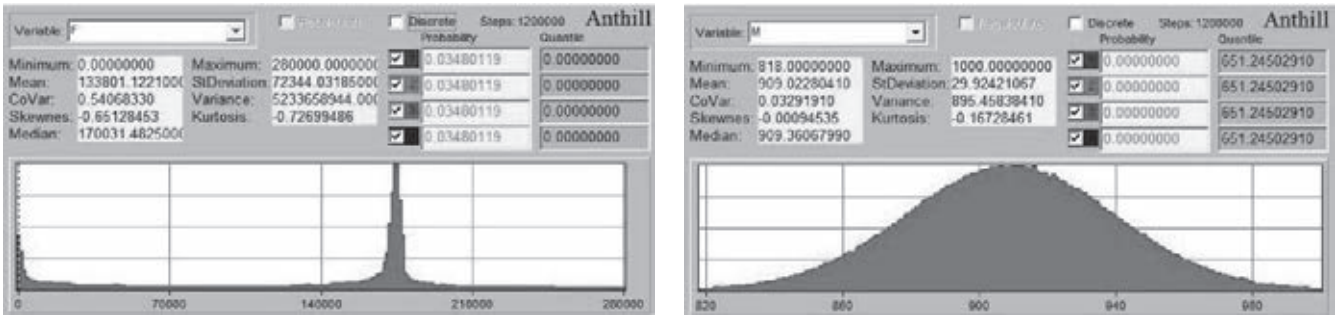
ŘEŠENÍ

Obecné řešení 4. případu zatěžování (tj. když normálová síla je tlaková a patří do intervalu $-2\sqrt{kEJ_{ZT}} < N < 0$ – řešení dle teorie 2. řádu) bez respektování přídavného vlivu posouvajících sil a teploty, je uvedeno v [1] až [4]. Za předpokladu, že spojité zatížení je konstantní ($q = q_0$), pak platí obecné řešení např. v exponenciálním tvaru dané nehomogenní diferenciální rovnicí:

$$EJ_{ZT}\frac{d^4v}{dx^4} - N\frac{d^2v}{dx^2} + kv = q_0$$

kde EJ_{ZT} je ohybová tuhost nosníku, N je normálová síla, k je tuhost podloží a $v = vx$ je hledaný průhyb nosníku.

Pro nejrychlejší analytické řešení je vhodné použít MPP s využitím symetrických okrajových podmínek. Uprostřed nosníku (bod počátku $x = 0$, viz obr. 1) existují okrajové podmínky (počáteční parametry –



Obr. 2 – Histogram zatěžující síly F [N] (vlevo) a momentu M [Nm] (vpravo) – příklady vstupu programu Anthill

Obr. 3 – Histogramy extrémní hodnoty výsledných napětí $\sigma_{MAX\ DOL}$, $\sigma_{MAX\ HOR}$, [MPa] v dolním a horním vlákně nosníku (výsledek programu Anthill).

hodnoty v nulovém bodu) průhybu $v = v\ (x = 0)$, natočení $v'_0 = dv\ (x = 0)/dx$, ohybového momentu $M_0 = M_0\ (x = 0)$ a posouvající síly $T_0 = T_0\ (x = 0)$. Pomocí těchto počátečních parametrů lze odvodit integrační konstanty pro 4. případ zatěžování normálovou silou. V tomto případě stačí hledat jen dvě integrační konstanty, protože dvě ze čtyř konstant jsou vždy známé (obecná platnost MPP). MPP tedy patří mezi nejrychlejší analytické postupy řešení. Podrobnější řešení i s analytickými vztahy je uvedeno v [3] a [4].

Histogramy extrémních hodnot výsledného napětí jsou znázorněny na obr. 3. Napětí $\sigma_{MAX\ DOL} = 150,62^{+116,43}_{-155,91}$ [MPa] (součet axiálního a ohybového napětí) v dolním vlákně nosníku, a napětí $\sigma_{MAX\ HOR} = -159,62^{+155,84}_{-117625}$ [MPa] (součet axiálního a ohybového napětí) v horním vlákně nosníku.

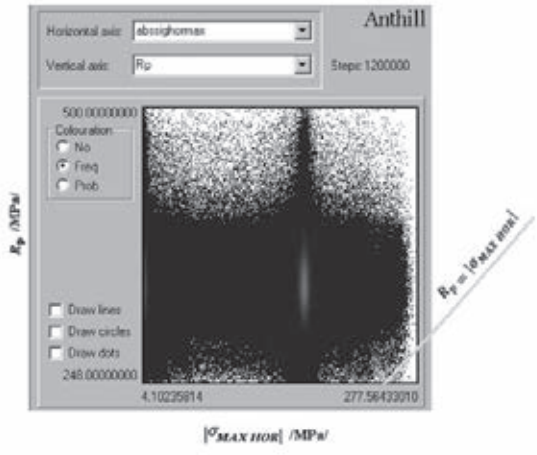
Pravděpodobnost nepříznivého stavu (vzniku plastických deformací v horním nebo v dolním vlákně nosníku $P_{F\ DOL}$, $P_{F\ HOR}$), tj. když $F_{S\ DOL} < 0$ nebo $F_{S\ HOR} < 0$, lze stanovit například z vyhodnocení dvourozměrných histogramů, viz obr. 4 (z poměru bodů pod křivkou $R_P = |\sigma_{MAX\ DOL}|$ či $R_P = |\sigma_{MAX\ HOR}|$ a všech bodů daného histogramu).

Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti se stanoví z podmínky: $P_F \leq P_{DOV}$.

Návrhová pravděpodobnost poruchy P_{DOV} se stanovuje dle reálných požadavků zadavatele a patří do oblasti moderního trendu designu. Obecně platí, že s rostoucím významem konstrukce klesá hodnota P_{DOV}. V ČSN 731401 jsou uvedeny návrhové pravděpodobnosti poruchy P_{DOV}.

SOUHRN A ZÁVĚRY

Pravděpodobnost překonání meze kluzu (dosažení plastických deformací) v nosníku je $P_F = 6,02\ x\ 10^{-5}$ (tj. 0,00602 %). Je zřejmé, že řešený nosník uložený na pružném podkladu vyhovuje obvyklé úrovni spolehlivosti pro stavební konstrukce dle mezního stavu únosnosti.



Obr. 4 – 2D histogram hodnoty napětí v horním vlákně nosníku vs. mez kluzu materiálu nosníku (výsledek programu Anthill).

Z řešeného příkladu i povahy SBRAM je zřejmé, že pravděpodobnostní přístup dokáže respektovat možné variace vstupních i výstupních hodnot, což je velmi blízké realitě.

Více informací o řešené úloze a metodě počátečních parametrů lze nalézt v [3] a [4].

Ing. Milan Sivera, *milan.sivera.st@vsb.cz,*
Ing. Richard Klučka, *richard.klucka.st@vsb.cz,*
doc. Ing. Karel Frydrýšek, Ph.D., *karel.frydrysek@vsb.cz,*
VŠB – TU Ostrava, Fakulta strojní,
Katedra pružnosti a pevnosti

LITERATURA:

[1] Frydrýšek, K. (2006): Nosníky a rámy na pružném podkladu 1 (Beams and Frames on Elastic Foundation 1), Faculty of Mechanical Engineering, VŠB – Technical University of Ostrava, ISBN 80-248-1244-4, Ostrava, Czech Republic, pp. 463

[2] Frydrýšek, K., Jančo, R. a kol. (2008): Nosníky a rámy na pružném podkladu 2 (Beams and Frames on Elastic Foundation 2), Faculty of Mechanical Engineering, VŠB - Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-1743-9, Ostrava, Czech Republic, pp. 516

[3] Frydrýšek, K., Nikodým, M. a kol. (2010): Nosníky a rámy na pružném podkladu 3 (Beams and Frames on Elastic Foundation 3), Faculty of Mechanical Engineering, VŠB – Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-2257-0, Ostrava, Czech Republic, pp. 607

[4] Frydrýšek, K., Fries, J. a kol. (2010): Aplikace konstrukcí na pružném podkladu, ISBN 978-80-248-2361-4, VŠB – Technical University of Ostrava, Ostrava, Czech Republic, pp. 204

[5] Marek, P., Guštar, M., Anagnos, T. (1995): Simulation-Based Reliability Assessment For Structural Engineers, CRC Press, Boca Raton, USA, ISBN 0-8493-8286-6, pp. 365

[6] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar, M., Tikalsky, P. (2003): Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation Background, Exercises and Software, (2nd extended edition), ISBN 80-86246-19-1, ITAM CAS, Prague, Czech Republic

[7] Frydrýšek, K. (2010): Pravděpodobnostní výpočty v mechanice 1, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB - Technical University of Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, Czech Republic, pp. 149

Combining the SBRA Method and Method of Initial Parameters for Solving the Task of Beams on Cushion

This paper deals with applications of probabilistic Simulation-Based Reliability Assessment (SBRA) Method and Method of Initial Parameters for solutions of the straight beams rested along its whole length on elastic foundation (theory of 2nd order, bending + compression). The determination of fully probabilistic reliability assessment is presented.